МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР

Заочная школа

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

5-11 класс.

Задание № 1 (2020 г.)

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Внимание! Необходимо присылать решенное задание класса, в котором Вы будете учиться в Заочной школе. Присылайте нам свою работу, даже если Вам не удается довести решение до ответа[1].

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Работа может быть оформлена на бумажном носителе (в ученической тетради в клетку) или в виде файла: лучше всего в виде набранного документа в формате .doc, .docx, .rtf, формулы и рисунки можно делать с помощью встроенного в Word редактора или вставлять в виде небольших картинок, отсканированных (или сфотографированных) с белых листов бумаги. Если Вы собираетесь сканировать работу, то оформляйте **не в тетради, а на белых листах формата А4.** Старайтесь, чтобы количество листов было минимальным. Пишите разборчиво, т.к. после сканирования иногда сложно разобрать текст. **Не нужно** присылать отдельным файлом каждую страницу Вашей работы. Сканируйте все страницы подряд – в один файл! Лучше сохранять в PDF формате. Обязательно пишите краткое условие задачи, а затем ее решение. Указывайте номера задач – они должны совпадать с теми, которые указаны в задании. Обязательно оставляйте поля для замечаний преподавателя.

На обложке тетради или (если работа в файле, то на 1 странице) нужно указать:

1. Отделение (математическое).
2. Класс, в котором Вы учитесь в Заочной школе.
3. Номер задания, тема
4. Ваш почтовый адрес (с индексом), конт. телефон, e-mail.
5. Фамилию, имя, отчество.

Убедительно просим оформлять обложку по указанному образцу.

Работу отправлять любым удобным для Вас способом:

● ***на бумажном носителе*:** простой или заказной бандеролью. В тетрадь вложите листок бумаги размером 6х10 см с Вашим почтовым адресом;

● ***в электронном виде:***

➢ по e-mail. Тема письма должна совпадать с названием файла с работой: Фамилия_предмет класс - № задания (напр.: Иванов_Математика 10 - 2) В письме обязательно укажите: ФИО, класс, предмет, № задания, тема, регион, конт. телефон. Мы всегда подтверждаем получение Вашей работы;

➢ или через личный кабинет сайта ЗШ.

Требования к оформлению работ в электронном виде и вся подробная информация есть на сайте ЗШ: http://zfmsh.nsu.ru, Тел.:+7(383)363 40 66; E-mail: zfmsh@yandex.ru

Адрес: ЗШ СУНЦ НГУ, ул. Пирогова, 11/1 (Ляпунова, 3), к. 455, Новосибирск-90, 630090

Вместе с рецензией к проверенной работе Вам будут высланы методические указания к решению задач и ответы. Настоятельно рекомендуем прочесть их, даже если Вы получили правильный ответ.[2]

5 класс

1. Известно, что если первое из двух заданных чисел умножить на 3 и вычесть второе число, то получится 742893, а если второе число умножить на 3 и вычесть первое, то получится 257107. Найдите, чему равна сумма заданных чисел.

---

[1] *Преподаватель оценит объем задания, который Вам удалось выполнить.*

[2] *Вы можете узнать и о другом способе решения.*

2. Фигуру, изображенную на рис. 1, разрезать на 6 одинаковых частей.

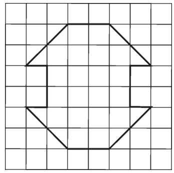

Рис. 1

3. В классе 52 % девочек, причем девочек на одну больше, чем мальчиков. Сколько мальчиков в этом классе?

4. У некоторой дроби числитель увеличили на 3, знаменатель увеличили на 4 и получили дробь, равную $\frac{1}{3}$. Найдите наименьшую дробь с таким свойством.

5. Известно, что сумму кубов первых n натуральных чисел можно вычислить по формуле $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Может ли сумма кубов нескольких первых натуральных чисел равняться 14 400?

6. На столе лежат 343 монеты. Двое игроков по очереди берут либо 3, либо 4 монеты. Выигравшим считается тот, кто забирает последние монеты. Кто выиграет в этой игре, если каждый старается сделать наилучший ход?

6 класс

1. У некоторой дроби со знаменателем, большим 4, числитель уменьшили на 3, знаменатель уменьшили на 4 и получили дробь, равную $\frac{2}{3}$. Найдите наибольшую дробь с таким свойством.

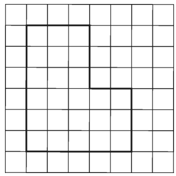

Рис. 2

2. Фигуру, изображенную на рис. 2, разрезать на две одинаковые части.

3. В магазин завезли авторучки, в первую неделю продали 22 % из этих авторучек, во вторую неделю продали $\frac{1}{3}$ от оставшихся, и всего за это время продали 252 авторучки. Сколько всего авторучек было завезено в магазин?

4. Найдите количество трехзначных натуральных чисел, у которых сумма цифр равна 10.

5. Известно, что сумму первых n натуральных чисел можно вычислить по формуле $\frac{n(n+1)}{2}$. Может ли сумма нескольких первых натуральных чисел равняться 8000?

6. На столе лежат 729 монет. Двое игроков по очереди берут либо 4, либо 5 монет. Выигравшим считается тот, кто забирает последние монеты. Кто выиграет в этой игре, если каждый старается сделать наилучший ход?

7 класс

1. Найдите, чему равно значение выражения $99-(97-(95-...-(3-1))...))$.

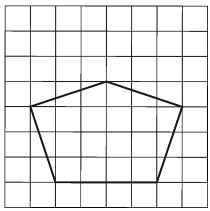

Рис. 3

2. Найдите площадь изображенной на рис. 3 фигуры, если площадь одной клетки равна 0,25 см^2.

3. От двух бревен отпилили по одинаковому куску, и первое бревно стало втрое длиннее второго. После того как от них еще раз отпилили по такому же куску, второе бревно стало короче первого в четыре раза. Во сколько раз первое бревно было длиннее второго первоначально?

4. Найдите количество трехзначных натуральных чисел, в десятичной записи которых используется ровно две различные цифры.

5. Найдите все целые значения m, при каждом из которых значение выражения $\frac{2m-2}{2m+7}$ будет натуральным числом.

6. Докажите, что если у шестизначного числа цифры, симметрично расположенные относительно середины, равны, то это число делится на 11.

8 класс

1. Сто чисел 1 записали подряд и расставили знаки «+», «–» и скобки по следующей закономерности: $1-(1-(1+(1-(1-(1+(1-...-(1-(1-(1+1)))...)))$.

Найдите значение этого выражения.

2. Буратино хочет купить букварь с цветными картинками, но ему не хватает 18 сольдо. На этот же букварь Мальвине не хватает 7 сольдо, а Пьеро не хватает 10 сольдо. Смогут ли Пьеро и Мальвина вместе купить один букварь на двоих?

3. В окружности Σ проведены хорда AB и вторая окружность S, которая касается хорды AB и окружности Σ в точках C и D. Докажите, что прямая CD содержит середину одной из дуг окружности Σ с концами A, B.

4. Докажите, что если $a+b+c=0$, то $(ab+bc+ac)^2=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$.

5. Найдите количество трехзначных натуральных чисел, в десятичной записи которых используется ровно две различные цифры.

6. Дана последовательность $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, в которой одно число равно (-1), а остальные равны 1. Строится новая последовательность $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ по правилу $b_1=a_1\cdot a_2$, $b_2=a_2\cdot a_3$, ..., $b_{n-1}=a_{n-1}\cdot a_n$, $b_n=a_n\cdot a_1$. Затем по такому же правилу строится третья последовательность $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$, и так далее. Докажите, что ни одна из получающихся последовательностей не будет совпадать с начальной последовательностью $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.

9 класс

1. 2020 чисел 1 записали подряд и расставили знаки «+», «–» и скобки по следующей закономерности: $1-(1-(1+(1-(1-(1+(1-...-(1-(1-(1+1)))...)))$. Найдите значение этого выражения.

2. Из пункта А в пункт Б одновременно по двум дорогам выезжают два автомобиля. Если первый автомобиль начинает ехать с некоторой постоянной скоростью v км/ч, то второй должен ехать со скоростью на 25 км/ч больше, чтобы одновременно с первым автомобилем приехать в пункт Б. Если же второй автомобиль начинает ехать со скоростью v км/ч, то первый должен ехать со скоростью на 20 км/ч меньше, чтобы одновременно со вторым автомобилем приехать в пункт Б. Найдите, чему равна скорость v.

3. В окружности проведена хорда AB, точка M середина одной из дуг с концами A и B. Из точки M проведены две хорды MC и MD, пересекающие хорду AB в точках E и F. Докажите, что треугольник MCD подобен треугольнику MFE.

4. Найдите наименьшее натуральное число, у которого ровно 15 различных делителей, включая число 1 и само число.

5. Найдите количество четырехзначных натуральных чисел, в десятичной записи которых используется ровно две различные цифры.

6. Решите уравнение $x^2=2x+8\sqrt{x}+3$.

10 класс

1. Найдите все корни уравнения $x^4-7x^2-2x+2=0$, если известно, что число $\sqrt{2}-1$ является одним из его корней.

2. Из коробки, содержащей монеты по 5 копеек и по 10 копеек, монету в 10 копеек можно вынуть с вероятностью $5/7$. После того как в коробку добавили несколько монет по 5 копеек, вероятность выбора монеты в 10 копеек из коробки стала равной $4/11$. Чему равно наименьшее число монет по 5 копеек, которые добавлялись в коробку?

3. Даны две непересекающиеся окружности, ни одна из которых не лежит внутри другой. Две внешние касательные к этим окружностям пересекаются с двумя внутренними касательными в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки и центры окружностей расположены на одной окружности.

4. При каждом натуральном n найдите сумму

$$S_n = 2\cdot 2^0 + 3\cdot 2^1 + 4\cdot 2^2 + \ldots + (n+1)\cdot 2^{n-1}.$$

5. Прямоугольник P расположен на клетчатой бумаге так, что его горизонтальные стороны и вертикальные стороны расположены на линиях сетки, а длины сторон равны 9 и 15 шагов сетки. Найдите количество всех других прямоугольников, расположенных внутри прямоугольника P, со сторонами, расположенными на линиях сетки, и не имеющих общих точек со сторонами прямоугольника P.

6. Найдите наименьшее натуральное число, у которого ровно 24 различных делителя, включая число 1 и само число.

11 класс

1. Вася задумал два натуральных числа, умножил их сумму на 8, а затем вычел из полученного числа квадрат одного из задуманных чисел. Оказалось, что результат этих действий на 47 меньше произведения задуманных чисел. Какие числа задумал Вася?

2. Найдите все корни уравнения $x^4-8x^3+19x^2-12x+2=0$, если известно, что число $2+\sqrt{3}$ является одним из его корней.

3. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC описана вокруг окружности и ее боковые стороны AB и CD касаются окружности в точках K и L соответственно. Найдите отношение оснований трапеции, если известно, что $AK:KB=k_1$, $DL:LC=k_2$.

4. Из коробки, содержащей монеты по 5 копеек и по 10 копеек, монету в 10 копеек можно вынуть с вероятностью $\frac{4}{7}$. После того как в коробку добавили несколько монет по 10 копеек, вероятность выбора монеты в 10 копеек из коробки стала равной $\frac{7}{9}$. Чему равно наименьшее число монет по 10 копеек, которые добавлялись в коробку?

5. Найдите все корни уравнения $\cos 2x + \cos\frac{3}{4}x = 2$.

6. Решением уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4=n$ в натуральных числах называется упорядоченный набор $(x_1;\, x_2;\, x_3;\, x_4)$ четырех натуральных чисел, сумма которых равна n. Найдите, сколько всего различных решений в натуральных числах имеет уравнение $x_1+x_2+x_3+x_4=100$.

Разработка задания: к.п.н, доцент Ю. В. Михеев, к.ф.-м.н., профессор А.С. Маркович.